SocioBrains
ISSN 2367-5721 (online), JOURNAL HOMEPAGE: WWW.SOCIOBRAINS.COM
Publisher: SMART IDEAS – WISE DECISIONS, Ltd., Sofia, Bulgaria

ISSUE 94, JUNE 2022

APPLICATION OF EULER AND VENN DIAGRAMS IN PRIMARY SCHOOL MATHEMATICS

Abstract: This article examines the application of Euler and Venn diagrams for modeling and solving practical problems from adaptive operations with natural numbers and number sets. The article presents example problems which lay the foundations of applying Euler and Venn diagrams and can be integrated in primary school mathematics classes.

Author information:

Kalina Aleksieva
Assoc. prof., PhD
Department of
Preschool and Primary School Education
Faculty of Education
at Konstantin Preslavsky – University of Shumen
k.aleksieva@shu.bg
Bulgaria

Keywords:
Euler and Venn diagrams, modeling, mathematical models, mathematics teaching in primary classes

В поредица от статии насочихме вниманието на читателя към избираемата подготовка по математика на учениците от 1. – 4. клас и по-конкретно към учебното съдържание, заложено в избираемия учебен час по математика. Целта на часовете за избираема подготовка е да се предложат възможности на учениците за надграждане на знанията от учебния материал в дадена предметна област и за развитие на общите им и специални способности чрез предлагане на задачи и дейности, изискващи по-високо натоварване, повече мисловна и творческа дейност. Честа училищна практика обаче, е, избираемият учебен час по математика да се използва за затвърдяване на знанията от учебната програма или за подготовка за различни математически състезания чрез решаване на задачи, давани предходни години. Това не дава възможност на учениците да развият пълноценно математическите си способности, защото се работи хаотично, без дейността да се подчини на някаква система, без да се стъпи на точно определени принципи и правила. Създаването на система от задачи е подчинено на основни изисквания, релевантни на целта на учебната дейност в избираемите часове, а именно:

- да стимулира мисленето;
- да е ориентирана не към възприемане на информация, а към умствена дейност, водеща до формулиране и решаване на проблеми;
- да е инвариантна и иновативна;
- да залага на действията, на правенето, на активното участие на ученика [5].

В настоящата статия ще представим практически задачи, в които участват операции с множества (обединяване, пресичане, допълване на „застъпващи се“ множества) и се решават (визуализират) с помощта на добилия известност ***метод на диаграмите на Ойлер-Вен***. Подобни задачи присъстват тематично в сборниците и учебните помагала за свободно избираема подготовка през 90-те години на миналия век (1992, 1993, 1998), но ограничено, в неявен вид в сега действащите учебни помагала и книги за извънкласна работа по математика [3, 4, 6, 7]. Причината за ограниченото, до липсващо присъствие на разглежданата тема за работа с множества и числа в учебното съдържание по математика според нас се дължи не толкова в трудността на задачите, а в недобре разработена дидактическа технология за тяхното изучаване. Стои въпросът: Какво през 90-те години е мотивирало учителя да работи тематично със своите ученици върху задачи от обединения и сечения на множества, върху диофантови уравнения, рачешки задачи и т.н. и защо днес това звучи почти неосъществимо? Какво се промени?

Исторически бележки

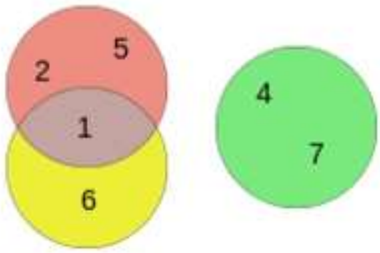
Леонард Ойлер (1707 – 1783) (на немски: *Leonhard Euler*) е швейцарски математик, физик и астроном, работил през голяма част от живота си в Русия и Прусия. Смятан е за един от най-великите математици на 18 век, както и за един от най-значимите математици на всички времена. Л. Ойлер е автор на важни открития в различни области на математиката, от математическия анализ до *теорията на графите*. Нещо любопитно: На **Леонард Ойлер** е зададен въпросът: *възможно ли е, докато се разхождате по Кьонигсберг, да се заобиколят всички мостове на града, без да се минава през нито един от тях два пъти?* Приложен е градски план със седем моста. В писмо до познат италиански математик Ойлер дава кратко и красиво решение на проблема с мостовете на Кьонигсберг: *при такова подреждане проблемът е нерешим*. В същото време той посочва, че въпросът му се струва интересен, тъй като *„Нито геометрията, нито алгебрата са достатъчни за решаването му”*. Решавайки занимателната *“задача на кьонигсбергските мостове”* стига до някои важни свойства на *графите*, които се превръщат в мощен ефективен и непрекъснато развиващ се математически инструмент.

При решаването на много задачи **Леонард Ойлер** изобразява комплекти с помощта на ***кръгове***, поради което те получават името ***Кръговете на Ойлер***. Ученият разработва *метода* доста задълбочено. *Кръговете на Ойлер* се състоят от прости затворени форми в двуизмерна равнина, всяка от които изобразява някакво множество или категория. Чрез трите възможни степени на припокриване (никакво, частично или пълно) се показва връзката между групите.

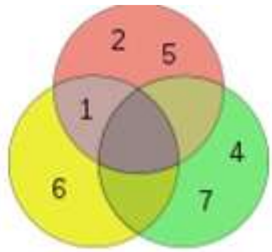
Графичните методи стават особено известни благодарение на английския логик и философ **Джон Вен** (1834-1923) (на английски: *John Venn*), който въвежда ***диаграми на Вен*** и подобни схеми често се наричат ***диаграми на Ойлер-Вен***. Те се използват в много области, например в *теорията на множествата, теорията на вероятностите, логиката, статистиката и компютърните науки*.

Диаграмите на Вен са нагледно представяне на логически отношения между крайни множества. Особена популярност добиват след средата на 20. в., когато започва използването им с образователна цел още в училище. Те се конструират в равнината като набор от затворени контури, които най-често се изобразяват като *кръгове или елипси*, а понякога – чрез квадрати и по-сложни фигури. Класовете или множествата са представени от площта, заградена от един контур. Извън същия контур се намират елементи, които строго не принадлежат на разглеждания случай. Логическите или теоретико-множествени отношения се проследяват с разглеждане на областите на припокриване и/или изключване, зададени от определени контури. В ***диаграмите на Вен*** фигурите се припокриват по всякакъв възможен начин, показвайки всички възможни връзки между множествата. По този начин те са ***частен случай на Ойлеровите кръгове***, но за разлика от тях *диаграмите на Вен* показват всички възможни връзки между различните множества, докато *кръговете на Ойлер* показват само относими отношения [9, 10].

Кръгове на Ойлер



Диаграми на Вен



Проучването на учебните ресурси относно изучаването на задачи от пресичащи се множества по метода на ***диаграмите на Ойлер-Вен*** в избираемия учебен час по математика към настоящия етап на обучение показва, че тематично само авторският колектив на учебното помагало *Пъстра математика за 2. клас* и *Пъстра математика за 4. Клас (Г. Кирова, Т. Витанов и др.)* разглежда задачи от този вид:


ТЕМА 42 Логически задачи

1. В един клас има 26 ученици. Всички учат английски или немски, като 18 учат английски и 15 учат немски. Колко ученици учат двата езика? Колко ученици учат само английски, колко ученици учат само немски?
Решение. Общо 33 ученици учат английски или немски език. Понеже учениците са 26 и 33 – 26 = 7, то 7 ученици учат двата езика. Тогава 18 – 7 = 11 и 11 ученици учат само английски. Понеже 15 – 7 = 8, то 8 ученици учат само немски.

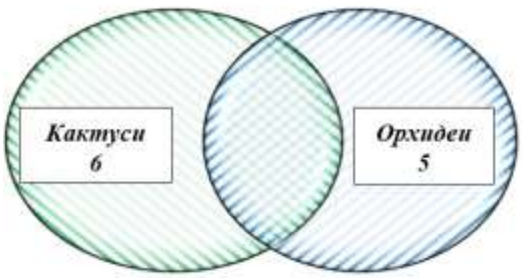
2. След проучване се оказа, че 42 от учениците във 2. клас на едно училище имат домашен любимец куче, котка или и двете. 38 от учениците имат домашен любимец куче, а 16 – котка. Колко ученици имат вкъщи:
а) куче и котка; б) само куче; в) само котка?

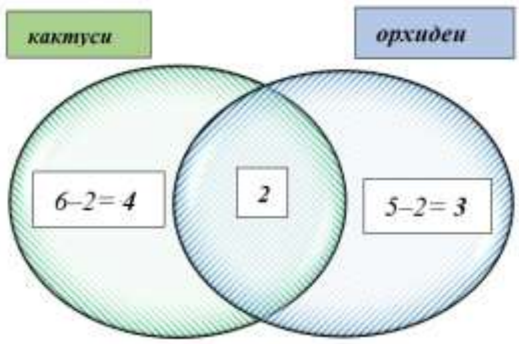

ТЕМА 43 Диаграми на Ойлер — Вен

В настоящата статия ще представим система от задачи и техните решения по ***метода на диаграмите на Ойлер-Вен***, която да способства за трайно и задълбочено усвояване на този тип задачи от учениците. Идеята е в хода на работата си началния учител да може да варира с числовите данни и сюжета на текста на представените варианти, като по този начин да обогати учебното съдържание по тази изключително интересна и занимателна тема, неоснователно слабо застъпена в часовете по математика.

❖ ***Първи тип задачи:*** *когато има пресичане на две базисни множества*

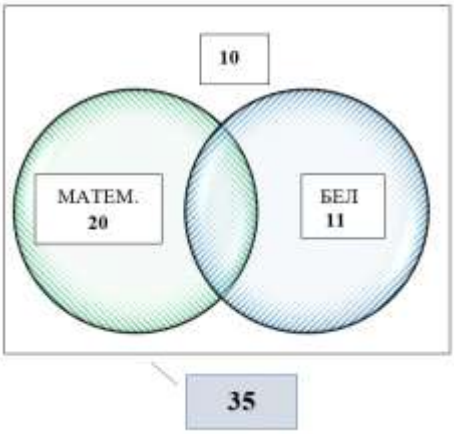
Задача 1. Всичките ми приятелки отглеждат някакви цветя в апартаментите си. Шест от тях отглеждат кактуси, а пет орхидеи. Само две отглеждат и кактуси, и орхидеи. Колко приятелки имам?

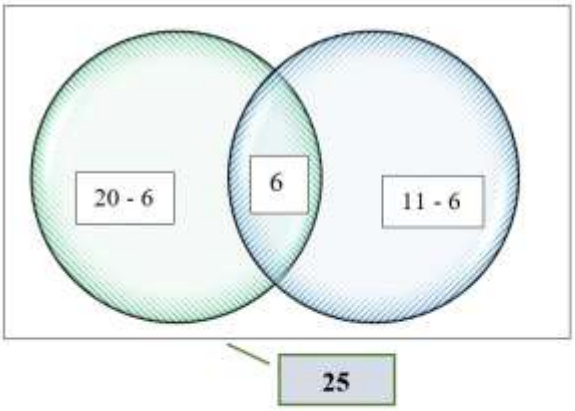




Решение: От условието на задачата разбираме, че **шест** от приятелките отглеждат кактуси, **пет** приятелки отглеждат орхидеи. Следователно 11 от приятелките отглеждат цветя, но щом **две** от тях отглеждат и кактуси и орхидеи, то намираме че: 11 – 2 = 9 е отговорът на задачата. Да проверим: от *диаграмата на Ойлер-Вен* е видно, че *6 – 2 =* ***4*** от приятелките отглеждат *само кактуси*, *5 – 2 =* ***3*** от приятелките отглеждат *само орхидеи* и *две* отглеждат и *двата вида* цветя. Така, като преброим *„частите от пъзела“* намираме, че *4 + 2 + 3 = 9 (приятелки)*.

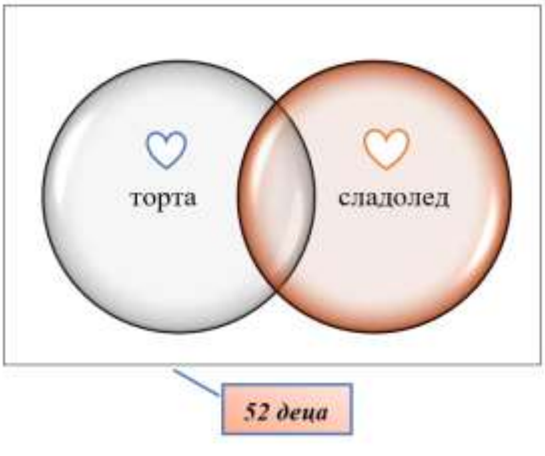
Задача 2. В един клас има 35 ученици. От тях 20 души участват в избираемия учебен час по математика, 11 в часа по литература, а 10 деца не посещават тези избираеми часове. Колко литератори се занимават с математика?

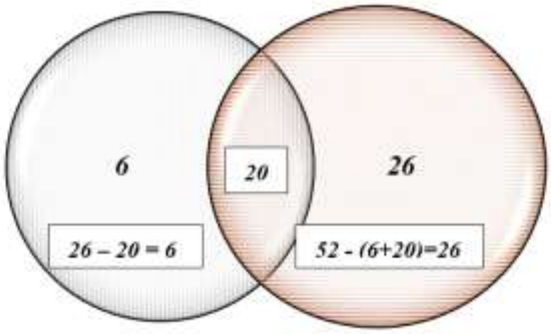




Решение: От условието на задачата разбираме, че **31** ученици участват в избираемия учебен час по ***математика или литература***, а **10** ученици от всички 35 ***не посещават тези часове***. Тогава учениците, които участват в ИУЧ са *35 – 10 = 25 и от 31 – 25 = 6* следва, че **6** ученици посещават ИУЧ по ***математика и литература***. От диаграмата е видно, че *20 – 6 = 14* ученици участват само в часовете по математика, а *11 – 6 = 5* участват само в часовете по литература.

Задача 3: На празник в детска градина има 52 деца. Всяко от децата обича или торта, или сладолед или и двете. Половината от децата обичат торта, а 20 харесват торта и сладолед. Колко деца обичат само сладолед?

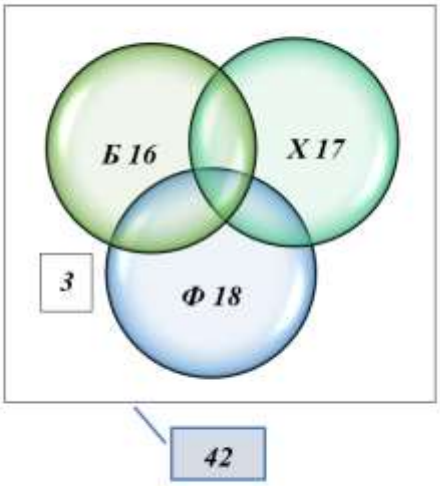


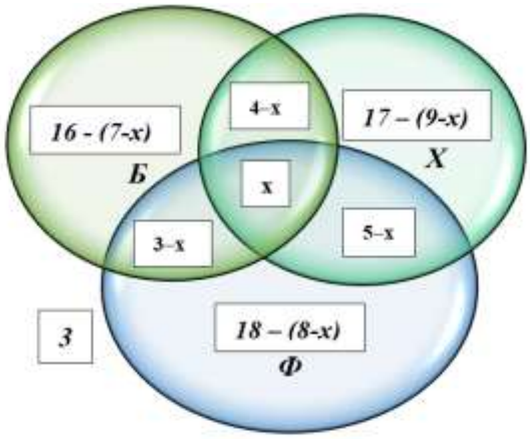


Решение: От условието знаем, че на детски празник има **52** деца, половината от които обичат **торта**, т.е. 52:2 = **26** от децата, а **20** харесват **торта и сладолед**. От диаграмата е видно, че ***26 – 20 = 6*** деца обичат *само торта*, **20** деца харесват и двете, откъдето намираме, че: *52 – (6 + 20) = 52 – 26 = 26 деца обичат само сладолед.*

❖ ***Втори тип задачи:*** *когато има пресичане на три базисни множества*

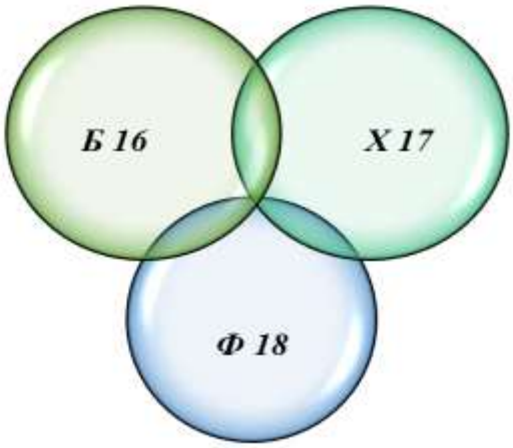
Задача 4. На стадиона има 42 спортисти. От тях 16 играят баскетбол, 17 играят хандбал, а 18 играят футбол. Те обичат два спорта: баскетбол и хандбал – играят четирима, баскетбол и футбол - трима, футбол и хандбал – петима спортисти. Трима не обичат баскетбол, хандбал или футбол. Има ли спортисти, които обичат и трите вида спорт? А колко спортисти тренират само един спорт?



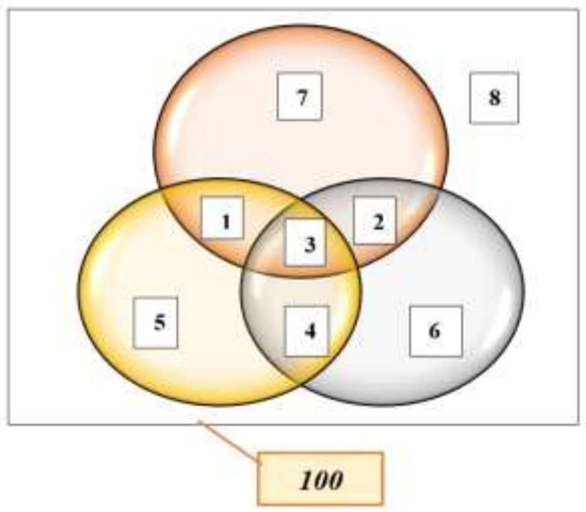


Решение: Моделът на задачата е диаграма, съставена от три пресичащи се множества. Означаваме с ***x*** броя на спортистите, които тренират и ***трите спорта***. След това означаваме и допълваме в диаграмата (*в „парчетата от пъзела“*) съответно броя на трениращите и трите спорта ***(x)***, трениращите баскетбол и хандбал ***(4 – x)***, баскетбол и футбол ***(3 – x)***, хандбал и футбол ***(5 – x)***. Броят на трениращите само ***баскетбол*** е 16 – (3 – x + x + 4 – x) = ***9 + x***; броят на трениращите само ***хандбал*** е 17 – (5 – x + x + 4 – x) = ***8 + x***; броят на трениращите само ***футбол*** е 18 – (5 – x + x + 3 – x) = ***10 + x***. Събираме броя на трениращите трите спорта, означен във всички части (*парчета от пъзела*) на диаграмата, отчитаме и тримата, които не спортуват и получаваме *9 + x + 8 + x + 10 + x + x + 4 – x + 3 – x + 5 – x = 42 – 3; 39 + x = 39;* ***x = 0****. Следователно* ***няма спортисти, които тренират и трите вида спорт****. Само баскетбол тренират 9; само хандбал 8; само футбол 10. Тогава 9 + 8 + 10 = 27, т.е. 27 спортисти се занимават само с един вид спорт.*

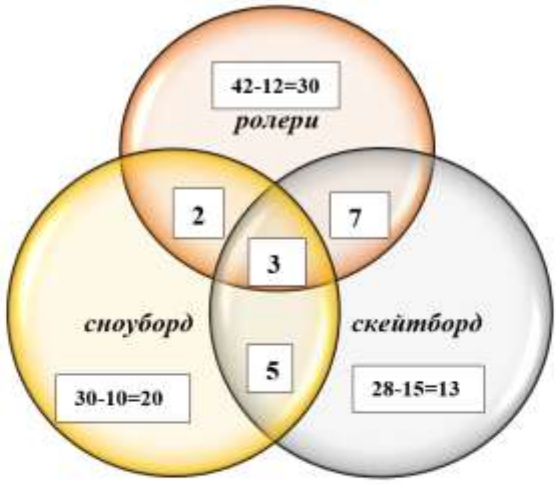
Кръговете в тази задача изглеждат така:



Задача 5. От 100 деца, които са на зелено училище, 30 деца могат да карат сноуборд, 28 могат да карат скейтборд, а 42 могат да карат ролери. Осем от децата карат сноуборд и скейтборд, 10 скейтборд и ролери, а 5 сноуборд и ролери. Три от децата карат скейтборд, сноуборд и ролери. *Колко от децата не знаят как да карат сноуборд, скейтборд или ролери? Колко от децата карат само скейтборд, сноуборд или само ролери?*



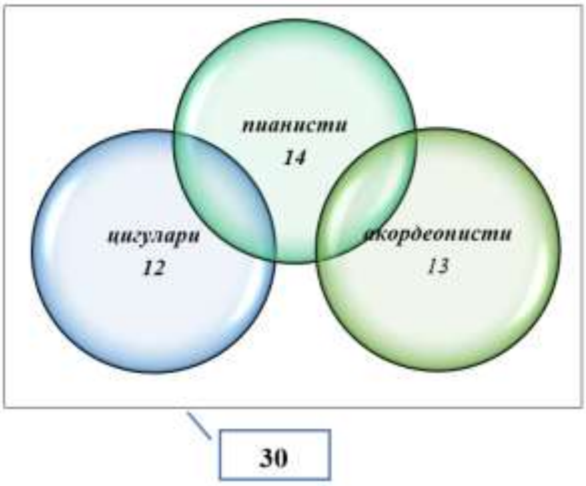
Решение: На диаграмата вляво са обозначени с номера от ***1 до 8*** всички области (*парчета от пъзела*), вкл. и външната област. На кръговете вдясно са изобразени участниците в зеленото училище сноубордисти, скейтбордисти и деца на ролери. Трите кръга имат общи части – всеки два помежду си и една обща част за трите. Решението на задачата се свежда до преброяване на „елементите“ на всички области.

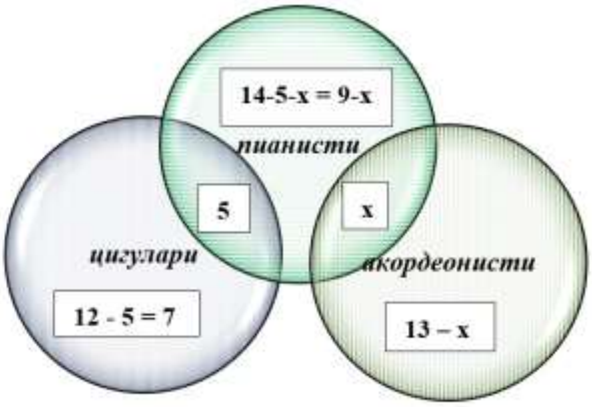


Общият брой на участниците в зеленото училище е *100*. От условието и диаграмата намираме че: област ***(3)*** *е 3*; област ***(1)*** *е 5 – 3 = 2*; област ***(2)*** *е 10 – 3 = 7*; област ***(4)*** *е 8 – 3 = 5*; област ***(5)*** *е 20*; област ***(6)*** *е 13*; област ***(7)*** *е 30*. Като съберем областите от ***(1) до (7)*** получаваме равенството *3 + 2 + 7 + 5 + 20 + 13 + 30 = 80*. Следователно област ***(8)*** е *100 – 80 =* ***20*** (деца не карат скейтборд, ролери, сноуборд). Отговорът на втория въпрос е виден на диаграмата*: само сноуборд карат 20 деца, само скейтборд 13 деца и само ролери карат 30 деца.*

❖ ***Трети тип задачи:*** *когато има частично пресичане (две по две) на три базисни множества*

Задача 6. В школа по музика има 12 цигулари, 14 пианисти и 13 акордеонисти. В школата участват 30 души и всеки свири на поне един инструмент. Ако никой от цигуларите не е акордеонист, а 5 са пианисти, то колко от пианистите са акордеонисти?

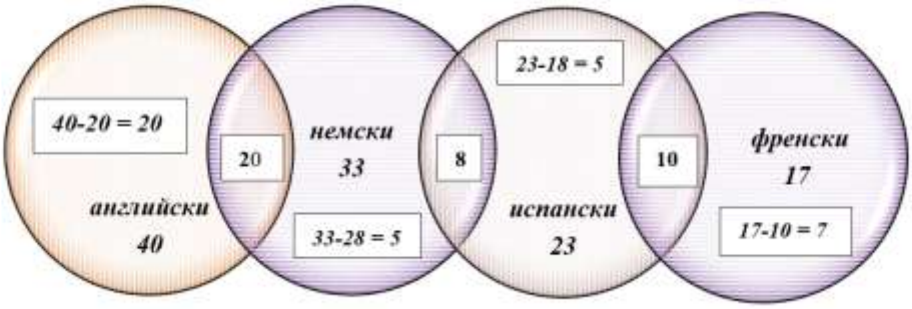




Решение: Моделираме задачата с три кръга, като само два от тях имат сечение. Ако означим броя на пианистите, които са и акордеонисти с ***x***, то попълваме останалите области на диаграмата с количествените характеристики от условието на задачата. Накрая събираме броя на всички участници в школата и получаваме $7 + 5 + 9 - x + x + 13 - x = 30;\ 34 - x = 30;\ \boldsymbol{x = 4}$

❖ ***Четвърти тип задачи:*** *когато има пресичане на повече от три базисни множества*

Задача 7. В училище за чужди езици „Европа“ всички ученици изучават един или два западни езика, като 40 ученика изучават английски език, 33 – немски, 23 – испански, 17 – френски, а 20 изучават едновременно английски и немски, 10 – испански и френски, 8 – немски и испански. Колко са учениците в училище „Европа“?



Решение: Моделираме задачата с четири кръга и попълваме областите (*частите от пъзела*) по аналогичен начин от предходните решения. Събираме стойностите от „пъзела“ и получаваме: ***20 + 20 + 5 + 8 + 5 + 10 + 7 = 75*** *(ученици учат в училище „Европа“).*

Отговорът на въпроса как да активизираме мисленето на децата, как да развием логиката и съобразителността им, как да постигнем успеваемост е именно в прилагането на релевантна технология – разнообразни методи, илюстрирани с примери, решения, разсъждения, явяващи се инструментариум, който да се използва за обучение в пряката работа на всеки учител.

References:

1. Baligand, V., Yu. Ninova. Posobie za izvanklasni formi na rabota po matematika za 4. klas na nachalnoto uchilishte (SIP). IF MODUL, Sofiya, 1993, s. 118
2. Velichkov, V., N. Raykov. Magiyata na intelekta. Sbornik za 4. klas po matematika (SIP). Sofiya, 1998, s. 74
3. Vitanov, T., G. Kirova i dr. Pastra matematika za 2. кlas. Sofiya, IK „Anubis“ OOD, 2017, ISBN 978-619-215-304-4

4. Vitanov, T., G. Kirova i dr. Pastra matematika za 4. кlas. Sofiya, Izd. „KLET BALGARIYA“ OOD, 2018, ISBN 978-619-215-408-0
5. Dineva, E. Za matematicheskite sposobnosti na uchenitsite ot nachalnite klasove. Izd. Kaloyanov, Burgas, 2016
6. Zlatilov, V. i kol. Matrmaticheska chitanka 4. кlas. Izd. Trud & prozorets, Sofiya, 2005
7. Kirova, G. Z. Sharkova. Zadachi bez granitsi. IK „Anubis“, 2015, ISBN 978-954-426-990-6
8. Rangelova, P. Az reshavam zadachi po matematika. Uchebno posobie za IV кlas. Izd. MAKROS 2000, Plovdiv, 1992
9. https://bg.wikipedia.org/wiki/Diagrama na Ven
10. https://bg.wikipedia.org/wiki/Kragove na Oyler